Algebra és gráfelmélet

Kedd 8:00 Marx terem

1. **Horváth Gábor (ELTE TTK)**
2. **Mérai László (ELTE TTK)**
3. **Mészáros Viola (SZTE TTK)**
4. **Patakfalvi Zsolt (ELTE TTK)**
5. **Varjú Péter (SZTE TTK)**
6. **Vértesi Vera (ELTE TTK)**
7. **Vértesi Vera (ELTE TTK)**
8. **Vértesi Vera (ELTE TTK)**

Véges csoportok azonosságai

HORVÁTH GÁBOR, matematikus (2003 ősz)
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Témavezető: SZABÓ CSABA, egyetemi docens,
ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

A mai algebrai és számítógépalgebrai kutatások egyik fő iránya az algebrai kérdések bonyolultságelméleti vizsgálata. Az algebra két központi kérdése, hogy egy adott algebrában milyen azonosságok teljesülnek, valamint milyen egyenletek oldhatók meg. Ezeket a kérdéseket két változatban szokás feltenni: termekre (mikor a kifejezéseinkben nincsenek konstansok) és polinomokra (engedélyezettek a konstansok is). Különösen érdekesek ezek a problémák a véges, klasszikus algebrai struktúrákban.

Gyűrűkre a fenti problémák teljesen karakterizálva vannak (H. Hunt, R. Stearnes (1990); S. Burris, J. Lawrence (1993); J. Lawrence, R. Willard (1997); Cs. Szabó, V. Vértesi (2003)). Csoportokra már lényegesen kevesebb ismert: M. Goldmann és A. Russel eredménye, hogy az azonosságvizsgálat bonyolultsága nilpotens csoportokban P-beli, nem feloldhatókban pedig coNP-teljes, de már olyan kis csoportban, mint az S_3, sem tudták megválaszolni a kérdést. A dolgozat egyik fő eredménye, hogy feloldható csoportok nagy osztályában (pl. metaciklikus csoportok, diéder csoportok, S_3, A_4) polinomidőben ellenőrizhető, hogy két kifejezés azonosan egyenlő-e.

A mai gyakorlati élet azt diktálja, hogy néhány műveletet (pl. hatványozás, kommutátor) számítógéppel előre kiszámoljunk, ezáltal csökkentve az azonosságaink hosszát. A fenti problémák ezen módosítását nevezzük csillag-problémáknak. Polinomokra kongruencia moduláris varietásokban (pl. csoport-, gyűrű-, háló-varietások) P. Idziak és Cs. Szabó (2003) igazolták, hogy nilpotens algebrákban a csillag-probléma P-beli, egyébként coNP-teljes. Az ő módszereik azonban termekre nem mondanak semmit. Dolgozatom másik fő eredménye, hogy termekre a csillag-probléma nilpotens csoportokban P-beli, nem nilpotens csoportokban (pl. metaciklikus csoportok, diéder csoportok, S_3, A_4) coNP-teljes.

Permutációk, melyek megmentették a világot

MÉRAI LÁSZLÓ, alkalmazott matematikus (2004 ősz)
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Témavezető: SZABÓ CSABA, egyetemi docens,
ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Dolgozatomban ismeretem az Enigma feltörését és problémájának általánosítását. Bár a köztudatban az él, hogy az Enigmát az angolok törték fel, ez nem fedi a valóságot. A lengyelek már a harmincas évektől dekódolták a rejtjelezett szövegeket. A történelem folyamán ekkor vontak be először matematikusokat a titkosírások tanulmányozásába. Egyikük, Marian Rejewski, 1980-ban publikált jegyzeteit egészítettem ki. Mivel a nyolcvanas évekig az Enigmával kapcsolatos információk titkosak voltak, és a későbbi cikkek is hiányosak, dolgozatom az első olyan elemző munka, amely teljesnek mondható.

Az Enigma feltörése, a számítógépek fejlődése miatt napjainkban egyre könnyebb feladat. Véges sok eset kipróbálásával az Enigmával kódolt üzenetek megfejthetők. Adódik a kérdés, hogy hogyan lehet az Enigmát a kor igényeihez igazítani. A fejlesztésre két lehetőséget mutatok be. Az egyik módszer a tárcsák gyakori cseréjén alapul, mivel így adott beállításról kevés információ nyerhető. A másik lehetőség, hogy tetszőleges számú tárcsa használata engedett meg. Mindkét módosítással elérhető, hogy az Enigma problémája NP-teljes legyen.

A fenti eredmények tárgyalása közben több, jelenleg is vizsgált bonyolultságelméleti problémába ütköztem. Igazolom többek közt, hogy annak ellenőrzése, hogy nem feloldható csoportban két term nem egyezik meg, NP-teljes. Mintegy „melléktermékként”, megválaszolom Szabó és Vértesi egy 2001-ben felvetett algebrai bonyolultság-elméleti problémáját.

Független élek gráfokban és geometriai gráfokban

MÉSZÁROS VIOLA, matematikus szakos hallgató (2004 tavasz)
Szegedi Tudományegyetem, Szeged

Témavezető: HAJNAL PÉTER, egyetemi docens,
SZTE Bolyai Intézet

Legyen G véges gráf, amely nem tartalmaz sem hurok, sem többszörös éleket. G lerajzolása G síkra való leképezése oly módon, hogy a csúcsainak különböző síkbeli pontok felelnek meg, az élei pedig önmagukat nem metsző folytonos síkbeli görbék a megfelelő pontok között. A lerajzolás pontjait és görbéit szintén csúcsoknak és éleknek nevezzük.

Geometriai gráfnak nevezzük az olyan lerajzolást, melynek élei szakaszok, és nem tartalmaznak más csúcsot a végpontjaikon kívül. Egy geometriai gráf két éle független, ha nem metszik egymást és nincs közös végpontjuk sem.

Tóth Géza és P. Valtr 1999-ben bebizonyították, hogy egy n pontú geometriai gráfnak, mely nem tartalmaz $k+1$ független élet, nem lehet több éle, mint $k^3(n+1)$. Valamint szerkesztettek egy $3/2(k-1)n-2k^2$ élű, n pontú geometriai gráfot, amely nem tartalmaz $k+1$ független élet. A felső korlátot Tóth Géza 2^9k^2n-re javította 2000-ben.

A dolgozatban az előbbi probléma további példákon keresztül kerül vizsgálatra. A geometriai gráfok témaköréről áttérve a gráfokéra szintén feltehető a kérdés, mennyi él garantál $k+1$ független élet. A dolgozat ezt a kérdést is tárgyalja.

3-reguláris gráfok élgráfjának normalitása

PATAKFALVI ZSOLT, matematikus (2004 ősz)
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Témavezető: SIMONYI GÁBOR, egyetemi docens,
BME VIK, Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

Gráfelméleti problémák mind a matematikán belül, mind környezetünkben természetes módon adódnak. Előbbire klasszikus példák a Ramsey tételek, míg utóbbira a Königsbergi hidak illetve a térképek négy színnel színezhetőségének a kérdése. A motiváló környezet különbözőségéből fakadóan általánosságban a gráfelméleti kérdések rendkívül változatosak lehetnek. Azokat, amelyek gráfok strukturális tulajdonságai közti kapcsolatokról szólnak szokás a strukturális gráfelméletbe sorolni.

A normalitás egy Körner János (1970) által bevezetett strukturális tulajdonság, amely kiterjesztése a rendkívül intenzíven kutatott perfektségnek. A perfekt gráfokat Claude Berge (1960) definiálta. Két híres perfekt gráfokról szóló sejtése a bizonyításukig a gráfelmélet központi kérdése volt. Az elsőt Lovász László (1972) a másodikat Chudnovsky, Robertson, Seymour és Thomas (2002) bizonyította be. A normális gráfok a perfekt gráfoknak több fontos tulajdonságát megőrzik. Például szintén zártak a komplemens képzésre illetve a perfekt gráfokéhoz hasonló információelméleti vonatkozásaik is vannak. Definíció szerint, egy gráf akkor és csak akkor normális, ha létezik egy $C_1,C_2,\ldots,C_n$ fedése klikkekkel, egy $S_1,S_2,\ldots,S_k$ fedése független halmazokkal, hogy minden C_i-nek és S_j-nek van közös pontja.

Dolgozatom fő eredménye azon állítás, hogy minden 3-reguláris gráf élgráfja normális. Rendkívül sok gráfelméleti tétel illetve sejtés, például a „négyszíntétel", visszavezethető a három színnel nem élszínezhető 3-reguláris gráfokra, az ún. snarkokra. A dolgozatban bizonyított állítás esetében is hasonló a helyzet, azaz nyilvánvaló a három színnel élszínezhető 3-reguláris gráfokra, és az állítás lényegi része itt is a snarkokról szól.

Gráfok négyzetmentes színezése

VARJÚ PÉTER, matematikus (2004 tavasz)
Szegedi Tudományegyetem, Szeged

Témavezető: BARÁT JÁNOS, egyetemi adjunktus,
SZTE Bolyai Intézet

Bizonyos szimbólumok egy $a_1, a_2, \ldots$ sorozatát négyzetmentesnek nevezzük, ha nem tartalmaz $x_1, \ldots x_m, x_1, \ldots x_m$ alakú egymást követő tagokból álló részsorozatot. 1906-ban Thue megmutatta, hogy megadható három szimbólumból álló négyzetmentes sorozat. Thue eredményét később többen újra felfedezték, és sokféle általánosítása született.

A dolgozatban egy ilyen általánosítást, egy gráfszínezési problémát vizsgálunk, amit először Alon, Grytczuk, Haluszczak és Riordan vetett fel 2002-ben. A cikkben olyan élszínezéseket vizsgálnak a szerzők, amelyekre teljesül, hogy a színek sorrendje négyzetmentes minden úton. Többek között megmutatják, hogy minden gráf színezhető a kívánt módon legfeljebb $c \cdot \Delta(G)^2$ színnel, ahol c alkalmas konstans, és $\Delta(G)$ a gráf csúcsainak legnagyobb fokszámát jelöli. Mivel az egy csúcsból induló élek mind különböző színt kapnak, $\Delta(G)$ triviális alsó korlát. Megemlítik, hogy a bizonyítás élszínezés helyett csúcsszínezésre is érvényes. Csúcsszínezéseknél egy csúcs szomszédai nem feltétlenül különböző színűek, és nem lehet a szükséges színek számát $\Delta(G)$ egy függvényével alulról becsülni. Felvetődik a kérdés, hogy a csúcsszínezéshez szükséges színek számát milyen gráfparaméterekkel lehet még korlátozni.

A dolgozatban megmutatjuk, hogy minden gráf négyzetmentesen csúcsszínezhető $O((6+\varepsilon)^{\mathrm{tw}(G)})$ színnel, ahol $\mathrm{tw}(G)$ a gráf faszélességét jelöli. A módszerek finomításával megmutatjuk, hogy minden outerplanar gráf 12 színnel csúcsszínezhető. Ugyanakkor mutatunk példát olyan outerplanar gráfra, amihez legalább 7 szín szükséges. A dolgozattól függetlenül Kündgen és Pelsmajer is bizonyította az outerplanar gráfokra vonatkozó felső korlátot, és az általános esetben jobb korlátot: $4^{\mathrm{tw}(G)}$ adtak.

A tagsági probléma hipergrafalgebrakban

VÉRTESI VERA, matematikus szak (2003 ősz)
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Témavezető: SZABÓ CSABA, egyetemi docens,
ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Napjainkban az algebrai kérdések bonyolultsági mértékének elemzése új kutatási iránnyá vált. Ezen vizsgálatok általában az általános algebrai struktúrákra, másnéven *algebrákra* irányulnak. Egy **A** algebrában teljesülő összes azonosság ($\mathbf{\Sigma_A}$) az **A** *azonosságelmélete.* Az **A** által generált *varietás,* $\mathbf{\nu}$(**A**), mindazon **B** algebrákból áll, amelyekben teljesül az összes **A**-ban teljesülő azonosság.

Az egyik legtermészetesebb probléma az úgynevezett *tagsági probléma,* amely egy **A** véges algebrára a következő: minden bemenetként kapott véges **B** algebráról el kell dönteni, hogy eleme-e $\mathbf{\nu}$(**A**)-nak, vagyis teljesül-e B-ben $\mathbf{\Sigma_A}$ minden azonossága. A tagsági probléma azonosság-ellenőrzéssel is tesztelhető. A tesztelés hatékonyságát méri a *β-függvény,* amely egy $\to$ függvény, s értéke az $n \in$ helyen azon azonosságok minimális hossza, melyeket le kell ellenőrizni egy legfeljebb *n*-elemű **B** algebrában, hogy megbizonyosodjunk arról hogy **B** benne van-e $\mathbf{\nu}$ (**A**)-ban. Pontosabban:

$$\beta(n) = \max\{l\colon \exists \boldsymbol{C} \notin \nu\left(\mathbf{A}\right), \left|\boldsymbol{C}\right| \le n, \boldsymbol{C} \text{ teljesít minden legfeljebb } l \text{ hosszú } \mathbf{A}\text{-ban teljesülő azonosságot}\}$$

A képletből látszik, hogy a *β*-függvény jól definiált és rekurzív (azaz algoritmikusan kiszámítható).

Könnyű igazolni, hogy a *β*-függvény legfeljebb triplaexponenciális. A klasszikus struktúrákra, mint például csoportokra (Gates and Powel, 1965), gyűrűkre (Kruse, Lvov, 1973) és hálókra (McKenzie, 1970) a *β*-függvény konstans. Az eddig talált leggyorsabban növő *β*-függvény szublineáris (McNulty, Székely, 1998).

A dolgozatban tetszőleges $k \in$ -re mutatok olyan véges algebrát, amelyre a *β*-függvény. rendje n^k . Ezzel nem csak - megjavítom McNulty és Székely eredményét, hanem belátom, hogy a *β*-függvényre nem adható univerzális polinomiális felső korlát.

Azonosságok 0-egyszerű félcsoportokban

VÉRTESI VERA, matematikus szak (2003 ősz)
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Témavezető: SZABÓ CSABA, egyetemi docens,
ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

A számítógépek egyre nagyobb térhódítása tapasztalható az algebrai kérdések bonyolultságának elemzésében. Azt gondolhatnánk, hogy egy adott algebrai struktúrára vonatkozó állítás ellenőrzése mindössze egy alkalmas program megírásának kérdése. Egy ilyen programnak azonban nemcsak a számítógépek képességei, hanem a matematikai logika is határt szab. Az egyik legtöbbet vizsgált kérdés a szóprobléma: a feladat annak eldöntése, hogy két adott kifejezés megegyezik-e tetszőleges behelyettesítés mellett.

2002-ig nem volt ismert olyan félcsoport, amelyre a szóprobléma coNP-teljes lenne. Végül Volkov (2002) mutatott egy körülbelül 2^{1700} elemszámú félcsoportot, amelyre a feladat coNP-teljes. Nem sokkal később Kisielewicz (2002) konstruált egy néhány ezer elemű példát. Szabó Csabával (2003) megadtunk egy 13 elemű félcsoportot, amelyre a probléma coNP-teljes. A legkisebb elemszámú példa Klima (2003) eredménye: az úgynevezett Brandt-monoid, amely 6 elemű. A 0-egyszerű félcsoportok olyan építőkövei a félcsoportoknak, mint a csoportok körében az egyszerű csoportok. Mindkét esetben a struktúra fő faktorairól van szó. Így remélhető, hogy azon 0-egyszerű félcsoportok karakterizálása, amelyekre a szóprobléma polinomiális, segíthet a félcsoportok általános karakterizálásában is.

Az eddigiekben a 0-egyszerű félcsoportok közül csak olyanokra voltak eredmények, amelyek struktúra csoportjára a szóprobléma coNP-teljes, s ebből automatikusan adódott az eredeti félcsoportra is a coNP-teljesség; illetve a kombinatorikus 0-egyszerű félcsoportokra, amelyekre a probléma polinomiális (Seife, Szabó 2000). A dolgozatban belátom Volkov (2001) sejtését, mely szerint egy 19 elemű 0-egyszerű félcsoportra a szóprobléma coNP-teljes. Ez a legkisebb olyan példa, amelynek struktúra csoportjára polinomiális a szóprobléma, de magára a félcsoportra mégis coNP-teljes.

Azonosságok gyűrűkben

VÉRTESI VERA, matematikus szak (2003 ősz)
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Témavezető: SZABÓ CSABA, egyetemi docens,
ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Az algebrai kérdések bonyolultságának vizsgálata az algebra egy új kutatási irányává vált. A legtöbbet vizsgált probléma, hogy egy adott véges algebrában milyen azonosságok teljesülnek. Ez az úgynevezett szóprobléma, azaz hogy egy algebra fölött teljesül-e, hogy két kifejezés minden behelyettesítésre egyenlő értéket vesz fel. A probléma nyilvánvalóan coNP-ben van. Adott struktúratípusoknál általában a dichotómia bizonyítása a cél, azaz, hogy a szóprobléma a struktúrák egy részére P-beli, a többire coNP-teljes. A továbbiakban a véges gyűrűket vizsgáljuk ilyen szempontból.

Véges gyűrűkre Burris és Lawrence (1993) belátta, hogy a szóprobléma P-beli, ha a gyűrű nilpotens, és coNP-teljes egyébként. Willard (1997) definiálta a szóproblémának egy másik változatát, amikor a két megadott szó csak monomok összege lehet. Ez a mód természetesebb, hiszen például a polinomokat is ilyen formában szoktuk megadni. A kérdés ebben az esetben is a szokásos, csak bizonyos szavak kifejtve lényegesen hosszabbak lehetnek, így a bemenő adatok mérete változik. Ha egy gyűrűre az eredeti szóprobléma P-beli, akkor nyilván polinomiális az „új" szóprobléma is. Willard és Lawrence (1997) igazolta, hogy ha a Jacobson-radikál szerinti faktor kommutatív, akkor az „új" probléma P-beli. Willard (1997), Szabó és Vértesi (2003) cikkei alapján az „új" szóprobléma coNP-teljes a nemkommutatív teljes mátrixgyűrűkre, és persze polinomiális a kommutatívokra.

A dolgozatban belátom, hogy a nemkommutatív mátrixgyűrűknek már a multiplikatív félcsoportjában is coNP-teljes a probléma. Ezen eredmény felhasználásával bizonyítom véges gyűrűkre a dichotómiát. Megmutatom, hogy az „új" szóprobléma bonyolultsága is csak a Jacobson-radikál szerinti faktortól függ; P-beli, ha a faktor kommutatív, és coNP-teljes egyébként.