

## A matematika alkalmazásai

**Hétfő 13:30 Ortvány-terem**

- 1. Antal Ágnes (BME TTK)**
- 2. Dénes Attila (SZTE TTK)**
- 3. Mincsovics Gergely (ELTE TTK)**
- 4. Nagy Marianna (ELTE TTK)**
- 5. Papp Dávid (BME TTK)**
- 6. Szabó Levente Endre (BBTE)**
- 7. Tóth István (BME TTK)**

## FHP típusú automata stacionárius mértékeinek jellemzése

ANTAL ÁGNES, mérnök-fizikus szakos hallgató (2004 ősz)  
*Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest*

Témavezető: FRITZ JÓZSEF, egyetemi tanár,  
*BME Differenciálegyenletek tanszék*

Az FHP sejtautomata gázok modellezésére használható. Ebben a modellben egy kétdimenziós szabályos végtelen háromszögrács rácspontjaiban találhatóak részecskék melyek az élek mentén egységnyi sebességgel mozognak. A mozgás diszkrét idejű, tehát a részecskék, sebességük irányába, egységnyi időnként ugranak át egyik rácspontból egy szomszédosba. Az ugrás nulla ideig tart. A részecskék között létrejövő egyetlen kölcsönhatás az ütközés, amely az egy időben egy helyen lévő részecskék között alakul ki, így a modell ideális gáz modellnek tekinthető. Az FHP modell elvén működő célgép közvetlenül állítja elő a gázdinamika egyenleteinek olyan megoldásait melyek numerikus módszerekkel nehezen közelíthetőek. Célunk tehát a gáz hidrodinamikai egyenleteinek megismerése, hiszen a célgéppel ezek megoldásait vizsgálhatjuk.

A hidrodinamikai egyenletek levezetésére Yau dolgozott ki általános módszert, amely akkor alkalmazható, ha minden eltolás invariáns stacionárius mérték, mikro-kanonikus Gibbs mérték. Az eredeti FHP automata stacionárius mértékeire nem teljesül az előbbi állítás, ezért módosítunk ezen a modellen, és több véletlenszerűséget viszünk a rendszerbe. A módosítás két részből áll. Az egyik lényege hogy az ütközések kevésbé determinisztikusak. A másik módosítás az, hogy létrehozunk úgynevezett csúszdákat, amelyekben a részecskék nulla idő alatt elmozdulhatnak a szomszédos rácspontok között.

Erre az új módosított modellre belátjuk, hogy -szemben az eredeti FHP modellel- alkalmazható rá Yau módszere. Ennek érdekében bizonyítjuk, hogy a módosított modellben minden eltolás invariáns stacionárius mérték, mikro-kanonikus Gibbs mérték. A bizonyítás lényege annak a lemmának a belátása, hogy két tetszőleges olyan részecske konfiguráció, ahol a részecskék száma és lendülete megegyezik, átrendezhető egymásba. Az átrendezés során a részecskék szabadon áramolhatnak (a sebességüknek megfelelő mozgást végezhetnek), a csúszdákon haladhatnak és ütközhetnek.

Ezzel beláttuk, hogy megkaphatóak az általunk módosított FHP modell hidrodinamikai egyenletei, tehát az tényleg alkalmazható az ideális gáz dinamikájának modellezésére.

### Hivatkozások:

- [1] J. Fritz, Stationary states and hydrodynamics of FHP cellular automata, J. Statist. Phys (1994).
- [2] J. Fritz, HPP-FHP cellular automata (1992).
- [3] U. Frisch et al.: Complex systems I. (1987).

## Attraktorok és medencék elméleti és numerikus vizsgálata populációdinamikai alkalmazásokkal

DÉNES ATTILA, matematikus (2004 ősz)  
*Szegedi Tudományegyetem, Szeged*

Témavezető: HATVANI LÁSZLÓ, egyetemi tanár,  
MAKAY GÉZA, egyetemi docens,  
*SZTE Analízis Tanszék*

A dolgozatban először Tusnádý Gábor egy genetikai modelljét vizsgáljuk. Ez a modell leírja egy populációban a genotípusok eloszlásának generációról generációra történő változását egy lókuszt és négy allélt esetén úgy, hogy figyelembe veszi a szelekció és a mutáció hatását. Tusnádý Gábor számítógépes kísérletek során ciklikus viselkedést tapasztalt a genotípusok fejlődésében. Először a bifurkáció elmélet segítségével bebizonyítjuk, hogy ennek oka egy

Neimark-Sacker-bifurkáció, majd az elméleti vizsgálatok eredményeit számítógépes szimulációval illusztráljuk.

A számítógépes szimulációhoz dinamikus rendszereket kezelő programcsomagokra van szükség. Ezek közül a legelterjedtebbek (*Dynamica*, *Dynamics*) sem használhatók különböző okokból attraktorok és medencék ábrázolására. A dolgozatban egy új, a *Dynamics* eljárásánál pontosabb algoritmust dolgozunk ki erre a célra. Az algoritmusnak megadjuk egy számítógépes realizációját a *Mathematica* felhasználásával, kiegészítve ezzel a *Dynamica* programcsomagot egy új vizsgálati eszközzel.

Algoritmusunkat és programunkat alkalmazzuk további két differenciaegyenlet-rendszer tanulmányozására. Az egyik egy parazita és gazdaszervezete együttélését, a másik pedig egy, a szőlőt megtámadó rovarpopuláció fejlődését modellezi.

## A minőségellenőrzési rendszerelmélet új megközelítése

**MINCISOVICS GERGELY**, programtervező matematikus (2003 ősz)

*Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest*

Témavezető: ZEMPLÉNI ANDRÁS, egyetemi docens,

*ELTE Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék*

Definiálunk egy általánosított minőségellenőrző rendszert és azon lehetséges elfogadási tartományok olyan halmazát, amelyen ez megbízható.

Ha adott egy többdimenziós tanulóhalmaz, kihasználjuk geometriai tulajdonságait. A hagyományos megközelítéssel ellentétben nem paraméteres módszert használunk az elfogadási tartomány meghatározására, hanem minden lépésben közvetlenül logikai függvény-approximációt próbálunk alkalmazni. Mivel az eljárásunk alkalmas adaptív döntésekre, az „elfogadás” és „elutasítás” mellett a függvényünk új, „segítség” értékét is bevezethetjük azért, hogy az ellenőrző mechanizmus pontosságát növeljük. Bebizonyítjuk az eljárásaink konzisztenciáját, algoritmussal és Matlab-ban írt számítógépes program segítségével is bemutatjuk őket. A módszereink geometriai, analitikus és valószínűségi technikákat is használnak.

## Mizuno-Todd-Ye prediktor-korrektor algoritmus $P_*(\kappa)$ mátrixokra

NAGY MARIANNA, alkalmazott matematikus (2003 ősz)  
*Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest*

Témavezető: ILLÉS TIBOR, egyetemi docens,  
*ELTE Operációkutatási Tanszék*

A lineáris komplementaritási feladatok megoldására két módszercsalád terjedt el. Az egyik a pivot algoritmusok, a másik a belsőpontos módszerek. Mindkét eljárás típusnak vannak előnyei és hátrányai, de mindkét esetben szükséges a feladat mátrixának valamilyen tulajdonságát feltételezni az algoritmus polinomialitáshoz.

A lineáris komplementaritási feladatok  $P$ -teljes problémák, ha a feladat mátrixáról nem teszünk fel semmit (ugyanis visszavezethető rájuk a hátizsák feladat). Kojima, Megiddo, Noma és Yoshise definiálta a legbővebb mátrixosztályt, amely esetén a belsőpontos algoritmusok polinomiális időben oldják meg a lineáris komplementaritási feladatot, ez a  $P_*$ -mátrixok osztálya. Ezen indokok miatt a Mizuno-Todd-Ye algoritmus működését a  $P_*(\kappa)$  mátrixosztályon vizsgáljuk meg.

Mizuno-Todd-Ye prediktor-korrektor típusú belsőpontos algoritmus egy új variánsát adjuk  $P_*(\kappa)$  mátrixszal meghatározott lineáris komplementaritási problémára szigorúan pozitív megengedett megoldás létezése mellett. Az eljárás a Potra által pozitív szemidefinit mátrixszal adott horizontális lineáris komplementaritási feladatokra mutatott Mizuno-Todd-Ye prediktor-korrektor típusú algoritmus általánosítása.

A módszer során az eredetihez hasonlóan a  $\|v^{-l} - v\|$  centralitási mértéket használjuk. Miao módszerétől eredményünk mind a használt centralitási mértékben, mind a centralitási paraméter iterálási módjában eltér. Valamint elemzésünk a korábbi eredményekhez képest egyszerűbb. Megmutatjuk, hogy az így kapott eljárás lépésszáma  $O\left((1 + \kappa)^{\frac{3}{2}} \sqrt{nL}\right)$ , azaz polinomiális.

## Bruttó reakciók felbontása diszkrét matematikai eszközökkel

**PAPP DÁVID**, műszaki informatika szakos hallgató (2003. ősz)  
*Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest*

Témavezető: TÓTH JÁNOS, egyetemi docens,  
*BME Matematikai Intézet, Analízis Tanszék*

Bruttó reakcióknak nevezzük azokat a kémiai folyamatokat leíró egyenleteket, amik megmutatják, hogy a folyamat során milyen anyagokból milyen más anyagok keletkeznek. Ez a formalizmus a folyamat magas szintű leírását adja csak, nem tartalmazza azonban azt az információt, hogy a vizsgált reakció hogyan – milyen elemi lépéseken keresztül – megy végbe valójában. A bruttó reakciók felbontásának célja az, hogy megadjuk, a reakció milyen eleminek tekinthető lépések sorozataként áll elő.

A probléma több, önmagában is érdekes részfeladatra osztható. Ezek egyike azoknak a lépéseknek a meghatározása, amiket eleminek tekintünk. Ezt korábban egyértelműen kémiai feladatnak tekintették, azaz a vizsgált bruttó reakció mellett (gyakran csupán kémiai intuíción alapozva) adottan vették az elemi lépések listáját is. Valójában ez a feladat is támogatható matematikai, illetve számítástechnikai eszközökkel.

A feladat második lépése a bruttó reakció felbontása az elemi lépésekre az összes lehetséges módon. A feladat több részből áll, melyek közül a legnehezebb egy lineáris diofantoszi egyenletrendszer megoldása a természetes számok halmazán. A megoldások száma tipikusan végtelen, ezek azonban véges sok megoldással reprezentálhatók. Az így kapott megoldások egy része kémiaileg értelmetlen, ezek kiszűrése egy gráfindexelési problémára vezethető vissza.

A probléma sok nagy jelentőségű reakció esetén régóta kutatási terület, ennek ellenére igen kevés azoknak a reakcióknak a száma, amiket sikerült teljesen feltérképezni. Ennek oka egyrészt a megoldások nagy száma, másrészt az, hogy a felmerülő algoritmikus problémák nagy része P-nehéz. A meglévő eredmények is gyakran *ad-hoc* megoldásokra építenek, általánosan használható programcsomag a felbontások előállítására még nem készült.

Dolgozatomban az összes kémiaileg értelmes felbontás előállítására használható diszkrét matematikai algoritmusokat, valamint azok implementációit vizsgálom. Bemutatom azt a Mathematica programcsomagot, ami alkalmas a felmerülő matematikai problémáknak a – lehetőségekhez képest – hatékony megoldására.

## Optimalizáció csoport szelektív genetikus algoritmusokkal

**SZABÓ LEVENTE-ENDRE**, informatika szak  
*Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár*

Témavezető: KOVÁCS LEHEL ISTVÁN, egyetemi adjunktus  
*BBTE Informatikai Rendszerek Tanszék*

A genetikus algoritmusok jó kereső algoritmusok, amelyeket nagyon sok területen használnak különböző feladatok megoldására. Népszerűségük egyre nő, és egyre bonyolultabb feladatok megoldására használják, ezért a genetikus algoritmusok hatékonyságának növelése egy fontos feladatnak tekinthető. Ebben a dolgozatban a genetikus algoritmusoknak egy új, általam kifejlesztett, változatát mutatom be, a csoport szelektív genetikus algoritmust. A klasszikus genetikus algoritmusokban a természetes szelekció hatására az alkalmasabb egyedek megmaradnak, az alkalmatlanabbak kihalnak. A klasszikus genetikus algoritmushoz viszonyítva a csoport szelektív genetikus algoritmusban a legnagyobb különbség az, hogy itt az egyedeken kívül egyedekből álló csoportok is (populációk) alá vannak vetve a természetes szelekciónak. A populációk versengenek egymással, ameddig csak egy marad, amely tovább fejlődhet. A csoport szelektív genetikus algoritmus jobban teljesít, mint a klasszikus genetikus algoritmus – kevesebb kiértékeléssel jobb megoldást talál – a végzett kísérletekben. Ezt a teljesítménykülönbséget két kísérlettel szemléltetem: egy függvényoptimalizációs feladattal és egy sokkal gyakorlatiasabb órarendkészítő feladattal.

## **Kölcsönható részecskerendszerek hidrodinamikai viselkedése: analitikus és numerikus vizsgálat**

**TÓTH ISTVÁN**, matematika szakos hallgató (2004 ősz)  
*Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest*

Témavezető: TÓTH BÁLINT, egyetemi tanár,  
*BME Matematika Intézet, Sztochasztika Tanszék*

A kölcsönható részecskerendszerek mikroszkopikus viselkedését a sztochasztikus folyamatok elmélete írja le. Az ún. hidrodinamikai határátmenet segítségével, az időt és a teret megfelelően átskálázva, megfigyelhető a folyamat egy nagy számok törvényeszerű viselkedése, amely parciális differenciálegyenletekkel tárgyalható. Ezek az egyenletek nem-lineárisak, és már a legegyszerűbb esetben is előfordul, hogy egy sima kezdeti feltételből kiindulva véges időn belül a megoldásban szakadás alakul ki. Emiatt általánosított megoldásokat kell értelmeznünk.

A dolgozatban egy konkrét folyamatot vizsgálunk. A modell röviden: egy egydimenziós diszkrét tóruszon ugrálnak részecskék egy irányban, az egy helyen lévő részecskék száma (alulról és felülről) korlátozott, egy rácsponton a részecskeszám 0, 1 vagy 2 lehet. A dinamika a következő: minden részecskéhez képzeljünk el egy véletlen exponenciális időközönként megsörrenő órát, óracsőrgéskor a részecske egyet ugrik előre, ha a részecskeszám korlátja megengedi. Az órák egymástól függetlenek, de nem azonos paraméterűek. A paraméterek megválaszthatóak úgy, hogy a stacionárius mérték szorzat alakú legyen (más esetben nagyon elbonyolódna a modell vizsgálata). Azonban ilyen esetben is van valamekkora szabadság a paraméterek, vagyis az ugrási ráták megválasztásában.

Az ugrási ráták meghatározzák a mikroszkopikus modellhez tartozó parciális differenciálegyenletet, a megfelelő egyenlet az Euler-egyenlet. Eddig többnyire olyan modelleket vizsgáltak, ahol a differenciálegyenletben szereplő fluxus függvény mindig konvex (vagy konkáv). A dolgozatban megmutatjuk, hogy a ráták megválaszthatók úgy, hogy a fluxus függvény nemkonvex (olyan értelemben, hogy egyes szakaszokon konvex, egyeseken pedig konkáv). Vannak más mikroszkopikus modellek, ahol fluxus nemkonvex, de ennél sokkal bonyolultabbak.

A nemkonvex fluxus függvény új jelenségeket generál. Az eddigi tételek nagy része kihasználja, hogy a fluxus konvex. Mi a dolgozatban a Riemann-probléma (nem-egyensúlyi) megoldását térképezzük fel, megvizsgáljuk, hogy milyen minőségileg különböző esetek lehetségesek. A Riemann-probléma egy speciális kezdeti feltételt jelent: az origótól jobbra és balra a sűrűség konstans, de két különböző konstans. Konvex fluxus esetén összesen két lehetőség van: vagy ritkulási hullám, vagy lökéshullám alakul ki. Nemkonvex esetben viszont egy sokkal gazdagabb világot fedezhetünk fel.

A Riemann-probléma részletes analitikus vizsgálatát a differenciálegyenlet segítségével végezzük el, és a különböző esetekre numerikus példát mutatunk a mikroszkopikus modellen, a sztochasztikus folyamat számítógépes szimulációja segítségével.