Valós és funkcionálanalízis

Kedd 13:30 Marx-terem

1. **Baják Szabolcs (DE TTK)**
2. **Balogh Ferenc (SZTE TTK)**
3. **Glavosits Tamás (DE TTK)**
4. **Mészáros Fruzsina (DE TTK)**
5. **Mező István (DE TTK)**
6. **Naszódi Gergely (ELTE TTK)**

A Hahn–Banach elválasztási tétel egy nemlineáris változata

BAJÁK SZABOLCS alkalmazott matematikus szakos hallgató (2004 ősz)
Szegedi Tudományegyetem, Szeged

Témavezetők: PÁLES ZSOLT, egyetemi tanár,
Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet

A funkcionálanalízis egy Dubovickíjtől és Miljutyintól származó eredménye a Hahn–Banach-féle elválasztási tétel alábbi általánosítása.

Tétel. Legyen X lokálisan konvex tér, továbbá legyen K_0 olyan nemüres konvex, $K_1,\dots,K_n$ pedig olyan nemüres belsejű konvex kúpjai, amelyek metszete üres. Ekkor léteznek olyan nem mind zéró $x_0^* \in K_0^*, x_1^* \in K_1^*, ..., x_n^* \in K_n^*$ folytonos lineáris funkcionálok, hogy

$$x_0^* + x_1^* + ... + x_n^* = 0.$$

(Itt a K^* adjungált kúp az olyan X^*-beli lineáris funkcionálok halmazát jelenti, amelyek nem vesznek fel pozitív értéket K-n.)

Fő eredményünkben, amely a fenti tételt általánosítja, a konvex kúpok szerepét konvex halmazok nemlineáris inverz képei veszik át.

Tétel. Legyenek $X, Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ Banach-terek, továbbá legyen $Q_0 \subseteq Y_0$ nemüres konvex, $Q_1 \subseteq Y_1$,..., $Q_n \subseteq Y_n$ pedig nemüres belsejű konvex halmazok. Legyen $D \subset X$ (nemüres) nyílt halmaz, $p \in D$ és $F_0: D \to Y_0$ a p pontban erősen Fréchet-szerint differenciálható, $F_1: D \to Y_1, \dots, F_n: D \to Y_n$ pedig a p pontban Gâteaux-értelemben differenciálható és lokálisan Lipschitz, továbbá $F_0(p) \in \overline{Q_0}, F_1(p) \in \overline{Q_1}, ..., F_n(p) \in \overline{Q_n}$ és az $F_0'(p)$, $F_1'(p), \dots,$ $F_n'(p)$ deriváltak szürjektív lineáris operátorok. Ha p-nek létezik olyan U környezete, hogy

$$U \cap F_0^{-1}(Q_0) \cap F_1^{-1}(Q_1) \cap ... \cap F_n^{-1}(Q_n) = 0,$$

akkor léteznek olyan nem mind zéró $y_0^* \in {}_{F_0(p)}(Q_0)$, $y_1^* \in N_{F_1(p)}(Q_1), \dots,$ $y_n^* \in N_{F_n(p)}(Q_n)$ folytonos lineáris funkcionálok, hogy

$$y_0^* \circ F_0'(p) + y_1^* \circ F_1'(p) + ... + y_n^* \circ F_n'(p) = 0$$

Itt $N_p(Q)$ a $Q \subseteq Y$ halmaz $p \in \overline{Q}$ pontbeli normálkúpját jelöli:

$$N_p(Q) := \left\{ y^* \in Y^* \middle| y^*(y) \le y^*(p) \text{ minden } y \in Q - \text{ra} \right\}$$

Folytonos lineáris operátorok ciklikus viselkedésformái

BALOGH FERENC, matematikus szakos hallgató (2004 tavasz)
Szegedi Tudományegyetem, Szeged

Témavezető: KÉRCHY LÁSZLÓ, egyetemi tanár,
SZTE Bolyai Intézet, Analízis Tanszék

A dolgozatban az *univerzalitás* általános fogalmán keresztül definiáljuk a topologikus vektortereken ható folytonos lineáris operátorok ciklikus viselkedésformáit (hiperciklikusság, szuperciklikusság és ciklikusság), majd adott típusú operátorokra koncentrálva (súlyozott kompozíció- és konvolúció-operátorok) szükséges és elegendő feltételeket adunk meg azok hiperciklikus és szuperciklikus viselkedésére.

Az 1. Fejezetben a szükséges fogalmak definiálása után az univerzális viselkedéssel kapcsolatos állításokat, tételeket mondunk ki. Ezután a hiperciklikusságra és a szuperciklikusságra a későbbiek szempontjából fontos elegendő feltételek (Kitai-Gethner-Shapiro Tétel, Salas tétele) következnek. Néhány fontos operátorosztályt (véges dimenziós operátorok, normális operátorok, izometriák, kontrakciók, hatványkorlátos operátorok) vizsgálunk meg a fent említett ciklikus viselkedésfajták szempontjából.

A 2. Fejezetben a súlyozott kompozíció-operátorok hiperciklikusságát és szuperciklikusságát vizsgáljuk meg. Az általános definíciók megfogalmazása után áttérünk a számláló mértékkel felruházott diszkrét alaptér esetére, és ott szükséges feltételeket keresünk a hiperciklikus viselkedésre. Néhány szükséges feltétel megtalálása után sikerül szükséges és elegendő feltételt adni a diszkrét téren ható súlyozott kompozíció-operátorok hiperciklikusságára. Ugyanerre teszünk próbálkozást szuperciklikus esetben, itt részleges eredmények találhatók.

A 3. Fejezetben az előző eredmények alkalmazásaként kompakt csoporton ható súlyozott konvolúció-operátorok hiperciklikus és szuperciklikus viselkedésformáit vizsgáljuk meg.

A dolgozatban megtalálható saját eredmények:

- Felcserélési Lemma,

- Diszkrét téren ható súlyozott kompozíció-operátorok hiperciklikusságának teljes karakterizációja,

- Diszkrét téren ható súlyozott kompozíció-operátorok szuperciklikusságának részleges karakterizációja,

- Megszámlálhatóan végtelen duális csoporttal rendelkező kompakt Abel-csoporton ható adott típusú súlyozott konvolúció-operátorok hiperciklikus és szuperciklikus viselkedésének karakterizációja.

Karakterizációs problémákból származó függvényegyenletek általános megoldása

GLAVOSITS TAMÁS, matematika szakos hallgató
Debreceni Egyetem, Debrecen

Témavezető: LAJKÓ KÁROLY, egyetemi docens
DE Analízis Tanszék

Seitmatsu Narumi japán matematikus a Biometria című folyóirat XV. számában 1928-ban megjelent cikkében függvényegyenleteket használ eloszlások együttes illetve marginális sűrűségfüggvényeinek meghatározására. Legyen *(X, Y)* egy kétváltozós valós értékű abszolút folytonos valószínűségi változó. Jelölje rendre

$$f_{(X,Y)},\, f_X,\, f_Y,\, f_{X|Y},\, f_{Y|X}$$

az együttes, marginális illetve feltételes sűrűségfüggvényeket. Ismeretes, hogy ekkor teljesülnek a következők:

$$f_{X|Y}\left(x|y\right) f_Y\left(y\right) = f_{Y|X}\left(y|x\right) f_X\left(x\right).$$

Narumi azokat az eloszlásokat vizsgálta, melyek feltételes sűrűségfüggvényei

$$f_{X|Y}\left(x|y\right) = \Psi_1\left[\left(x - f_1\left(y\right)\right) g_1\left(y\right)\right], \quad f_{Y|X}\left(y|x\right) = \Psi_2\left[\left(y - f_2\left(x\right)\right) g_2\left(x\right)\right]$$

ahol az fi, gi (i = 1,2) adott függvények, Ψ1, Ψ2 ismeretlen függvény. Ez utóbbi egyenlet et összevetve az (1) egyenlettel, kapjuk, hogy

$$\Psi_1\left[\left(x - f_1\left(y\right)\right) g_1\left(y\right)\right] f_Y\left(y\right) = \Psi_2\left[\left(y - f_2\left(x\right)\right) g_2\left(x\right)\right] f_X\left(x\right)$$

Ezek az egyenletek az fi, gi (i = 1, 2) bizonyos speciális megválasztása esetén a következő egyenletekre vezethetők vissza:

(1) $$G_1\left(\frac{x+1}{y}\right) + F_1\left(y\right) = G_2\left(\frac{y+1}{x}\right) + F_2\left(x\right) \qquad \left(x, y \in \mathbb{R}_+\right)$$

(2) $$G_1\left(x\left(y+1\right)\right) + F_1\left(y\right) = G_2\left(y\left(x+1\right)\right) + F_2\left(x\right) \qquad \left(x, y \in \mathbb{R}_+\right)$$

A dolgozat célja az (l)-es illetve (2)-es egyenletek általános illetve mérhető megoldásainak a meghatározása.

Majdnem mindenütt teljesülő függvényegyenletek és karakterizációs problémák

MÉSZÁROS FRUZSINA, matematikus, (2004 ősz)
Debreceni Egyetem, Debrecen

Témavezető: LAJKÓ KÁROLY, egyetemi docens,
DE Analízis Tanszék

Dolgozatomban a valószínűségelmélet karakterizációs problémáiban felmerült függvényegyenleteket vizsgálok. Speciális sürűségfüggvény-osztályok esetén keresem az együttes sűrűségfüggvényt és ehhez majdnem mindenütt teljesülő függvényegyenletek mérhető megoldását határozom meg. A

$$g_1\left[\left(x-f_1(y)\right)F_1(y)\right]f_Y(y)=g_2\left[\left(y-f_2(x)\right)F_2(x)\right]f_X(x)$$

függvényegyenletet vizsgálom a benne szereplő f_1, f_2, F_1, F_2 függvények több speciális választása mellett, és csak annyit teszek fel, hogy az egyenlet majdnem minden x,y-ra teljesül, a függvények pedig mérhetőek és pozitívak.

Először a

$$g_1\left(\frac{x-m_1y-c_1}{\lambda_1(y+a_1)}\right)f_Y(y)=g_2\left(\frac{y-m_2x-c_2}{\lambda_2(x+a_2)}\right)f_X(x)$$

egyenletet vizsgálom, amely majdnem minden

$$(x,y)\in D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \,\middle|\, x+a_2>0, y+a_1>0\right\}$$

esetén teljesül, és megadom a mérhető megoldásait.

A második vizsgált egyenlet pedig a

$$g_1\left[(y+a_1)x+b_1y+c_1\right]f_Y(y)=g_2\left[(x+b_2)y+a_2x+c_2\right]f_X(x)$$

függvényegyenlet, amely majdnem minden $(x,y)\in D_1\times D_2$ esetén teljesül, ahol $D_1=\mathrm{R}\setminus\{-b_1,-b_2\}$ és $D_2=\mathrm{R}\setminus\{-a_1,-a_2\}$. Ebben az esetben is megadom a majdnem mindenütt teljesülő egyenlet mérhető megoldásait.

Folytonossági modulus és legjobb approximáció logaritmustérben

MEZŐ ISTVÁN, matematikus szakos hallgató (2004 ősz)
Debreceni Egyetem, Debrecen

Témavezető: GÁT GYÖRGY, egyetemi docens,
DE Analízis Tanszék

Vilenkin téren értelmezett, komplex értékű, logaritmustérbeli függvények polinomokkal való approximálhatóságát és folytonossági modulusát fogjuk vizsgálni.

A dolgozat egyik fő eredménye annak bemutatása, hogy tetszőleges – a fenti tulajdonságokkal rendelkező – függvény folytonossági modulusa monoton csökkenő valós nullsorozat és minden ilyen sorozathoz létezik függvény, melynek ez a folytonossági modulusa.

A másik eredmény szerint a Fourier-sor úgy közelíti a leképezést a logaritmus-normában, ahogyan annak folytonossági modulusa tart nullához. Hasonló igaz a polinomokkal való approximálhatóságra is. Következményként kapjuk, hogy a Fourier-sor normában konvergál a függvényhez.

A Vilenkin tér messzemenő általánosítása több struktúrának, amelyek közül az egyik a Walsh-rendszer. Ez jó eszköz differenciál- és integrálegyenletek közelítő megoldásának megkeresésére, képfeldolgozásra és írásfelismerésre. Rendkívül kis tárigénye, jó algoritmizálhatósága, pontossága és gyorsasága miatt hasznos a számítógépes matematikában.

Hivatkozások:

[1] Fridli, S.: On the modulus of continuity with respect to functions defined on Vilenkin groups (English), Acta Math. Hung. **45**(3-4), 393-396 (1985).

[2] Gát, Gy.: Best approximation by Vilenkin-like systems (English), Acta Math. Paed. Nyíregyh., **17**(3), 161-169 (2001).

Euklideszi terek analízisbeli különbségei

NASZÓDI GERGELY, matematikus (2003 ősz)
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Témavezető: BUCZOLICH ZOLTÁN, egyetemi docens,
ELTE Analízis Tanszék

Gyakori matematikai probléma bizonyos objektumok közötti különbségtétel. Gyakran azt mutatják meg, hogy két objektum között nem létezik jó (azaz bizonyos) tulajdonságokkal rendelkező leképezés. Dolgozatomban is ilyen irányú vizsgálatot végzek. Kimutatom, hogy magasabb dimenziós nyílt halmazból nem létezik alacsonyabb dimenziós térbe érkező $\boldsymbol{C}^1$ osztályú injektív leképezés.

A bizonyítás rövid vázlata az alábbi. Indirekt bizonyítást használok. Először olyan nyílt halmazt találok, ahol a deriváltleképzés rangja konstans. Ezután a Gauss eliminációt folytonosítom lokálisan. Olyan el nem tűnő vektormezőt nyerek, mely merőleges az eredeti leképezés gradiensére. Végül e vektormező felhasználásával eljutok egy olyan kezdetiérték problémához, melynek megoldása az eredeti leképzés szintfelületein mozgó görbe, s így nem lehet injektív a szóban forgó leképzés.

Ezzel a témával kapcsolatban természetesen más is foglalkozott, s dolgozatom hivatkozik az idevonatkozó tételekre. Úgy érzem, hogy az általam adott bizonyítás szemléletesebb és rövidebb a tétel ismertebb változatainál.