

Geometria és topológia

Hétfő 16:00 Ortvay-terem

- 1. Ambrus Gergely (SZTE TTK)**
- 2. Iclānzan David - Róth Ágoston (BBTE)**
- 3. Juhász András (ELTE TTK)**
- 4. Kalmár Boldizsár (ELTE TTK)**
- 5. Kalmár Boldizsár (ELTE TTK)**
- 6. Kelemen Károly (DE TTK)**
- 7. Pék Johanna (DE TTK)**

Helly-típusú elméletek for line transversals to n -dimenziós egységkörön

AMBRUS GERGELY matematikus szakos hallgató (2004 ősz)
Szegedi Tudományegyetem, Szeged

Témavezetők: BEZDEK ANDRÁS, egyetemi tanár,
*MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Budapest és Auburn
University, USA*

FODOR FERENC, egyetemi docens,
SZTE Geometria Tanszék

Az \mathbf{R}^n -beli konvex testek egy F osztályának létezik *transzverzálisa*, ha van olyan egyenes, amely F minden elemét metszi. Az F osztály T tulajdonságú, ha létezik transzverzálisa; valamint F rendelkezik a $T(k)$ tulajdonsággal, ha bármely legfeljebb k elemű részhalmazára teljesül T . A dolgozatban páronként diszjunkt n -dimenziós egységgömbökből álló véges osztályokkal foglalkozunk. Célunk: elégséges feltételeket találni transzverzális létezésére, ez Helly 1913-as tételének egyfajta általánosítása. A problémát 2 dimenzióban sokan vizsgálták. 1989-ben Tverberg bebizonyította Grünbaum 1958-as sejtését, mely szerint a síkban egy konvex lemez páronként diszjunkt eltoltjaiból álló véges osztályra $T(5)$ -ből következik T . Holmsen és Matoušek (2004) eredménye, hogy 3 dimenzióban ilyen állítás nem létezik tetszőleges konvex test eltoltjaira. Holmsen, Katchalski és Lewis 2003-ban azonban megmutatták, hogy diszjunkt 3-dimenziós egységgömbökre $T(46) \rightarrow T$. A dolgozatban bebizonyítjuk, hogy ha az F véges osztály olyan \mathbf{R}^n -beli n -dimenziós egységgömbökből áll, melyek közül bármely kettő középpontjának távolsága legalább 4 és F rendelkezik a $T(n^2)$ tulajdonsággal, akkor F -nek létezik transzverzálisa. Ezen kívül élesítjük a 2-dimenziós esetben kapott eredményt.

Minimális geodetikusok szerkesztése Finsler sokaságokon

ICLÄNZAN DAVID és RÓTH ÁGOSTON, hallgatók
Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár

Témavezető: VARGA CSABA, egyetemi docens,
BBTE Geometria Tanszék

KRISTÁLY SÁNDOR, egyetemi oktató,
BBTE Sepsiszentgyörgyi Intézete

Dolgozatunkban két különböző módszert szeretnénk bemutatni minimális geodetikusok szerkesztésére annak érdekében, hogy metrikus relációkat ellenőrizhessünk számos differenciálható sokaságon. Genetikus algoritmusra és gradiens módszerre épülő eljárásaink segítségével az általánosított Thálesz tétel teljesülését tanulmányozzuk, amely egy mostanság megfogalmazott, Finsler tereken értelmezett rigiditási sejtés háttérében áll. Az implementált eljárások által szolgáltatott ábrák és numerikus eredmények egymást igazolják, valamint az említett sejtésnek a helyes mivoltát támasztják alá.

Szinguláris leképezések osztályozása

JUHÁSZ ANDRÁS, matematikus (2003 ősz)
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Témavezető: SZÜCS ANDRÁS, egyetemi tanár,
ELTE Analízis Tanszék

A differenciáltopológia fő feladata a sima sokaságok és a köztük menő sima leképezések osztályozása. Sima leképezések egy fontos osztályát alkotják az immerziók, azaz azon leképezések, melyek differenciálja minden pontban injektív. Immerziók reguláris homotópia osztályozását Whitney kezdeményezte. Az igazi áttörést Smale, majd Hirsch munkái hozták, melyek visszavezetik az osztályozást egy tisztán algebrai topológiai feladatra.

Legyen M^n zárt sokaság és $n > 1$. Jelen dolgozatomban az $M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ lokálisan generikus leképezések $L(n, 2n-1)$ terének útösszefüggő komponenseit vizsgálom. (Itt az $L(n, 2n-1)$ teret a C^∞ -topológiával látjuk el.) Ezen dimenziókban minden lokálisan generikus leképezés immerzió véges sok Whitney-esernyő szingularitástól eltekintve. Speciálisan minden immerzió lokálisan generikus, de nem minden sima $M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ leképezés approximálható immerziókkal a C^∞ -topológiában. Viszont $L(n, 2n-1)$ már sűrű $C^\infty(M^n, \mathbb{R}^{2n-1})$ -ben. Két lokálisan generikus leképezést regulárisan homotópnak nevezünk, ha $L(n, 2n-1)$ -nek ugyanazon útösszefüggő komponensébe esnek.

Jelen dolgozatom fő eredménye, hogy $n \neq 3$ esetén $f, g \in L(n, 2n-1)$ pontosan akkor regulárisan homotópok, ha ugyanannyi szinguláris pontjuk van, feltéve, hogy nem immerziók. Az $n = 2$ eset bizonyításával egy korábbi cikkemben foglalkoztam. Ez az egyszerű osztályozás éles ellentétben áll az immerziók osztályozásának bonyolult algebrai topológiai jellegével. Cikkemet a Proceedings of the London Mathematical Society publikálásra elfogadta.

Felületeken adott függvények

KALMÁR BOLDIZSÁR, matematikus (2004 ősz)
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Témavezető: SZÜCS ANDRÁS, egyetemi tanár,
ELTE Analízis Tanszék

Alapvető probléma a differenciáltopológiában a sima sokaságok, és a sima sokaságokon adott sima függvények osztályozása. Az osztályozási szempontok közül az egyik a sima függvények kobordizmuscsoportjának fogalmához vezet el: arról van szó, hogy sokaságokon adott sima függvényeknek egy nagyon természetes úton definiált ekvivalenciaosztályain egy természetes módon adódó csoportstruktúrát vizsgálnak. Egy érdekes speciális eset, amikor zárt felületeken értelmezett Morse függvényekről van szó. Az első lépéseket ebben a témában egy jól használható megközelítési módszer kidolgozásával együtt Ikegami és Saeki tette meg.

Morse függvényeknek azokat a sima függvényeket nevezzük, amelyek szinguláris pontjai nem elfajulóak, tehát a második derivált valamilyen definit kvadratikus alak, ha az első derivált eltűnik. Az ilyen függvények sűrűek az összes lehetséges függvények terében. Jelen dolgozat a nem irányított felületeken adott Morse függvények kobordizmuscsoportját számolja ki. A megközelítési mód, ami Ikegamitól és Saekitől származik, egy gráfot - az úgynevezett Reeb gráfot - és egy rajta értelmezett függvényt származtat a felületből és a felületen értelmezett Morse függvényből, és ezen gráfleképezést vizsgálja. A jelen probléma megoldásához viszont szükség van az ilyen típusú gráfokon és ekvivalenciaosztályaikon végzett új, eddig nem vizsgált manipulációkra és átépítésekre.

Jelen dolgozat megmutatja, hogy az eddigi kutatási módszerek a már ismert konstrukciók megfelelő gazdagítása és új szemléletmód bevezetése mellett nemirányított felületeken értelmezett Morse függvények esetében is hatékonyan működnek. A Morse függvények ilyen módon nyert osztályozását a dolgozat konkrét, jól vizualizálható geometriai jelentéssel bíró függvényekkel is interpretálja.

3-sokaságok szinguláris leképezései

KALMÁR BOLDIZSÁR, matematikus (2004 ősz)
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Témavezető: SZÜCS ANDRÁS, egyetemi tanár,
ELTE Analízis Tanszék

Alapvető probléma a differenciáltopológiában a sima sokaságok, és a sima sokaságok közötti sima leképezések osztályozása. Nagyon sok osztályozási szempont ismert, az egyik régóta sokat vizsgált közülük a sima leképezések kobordizmuscsoportjának fogalmához vezet el: arról van szó, hogy sokaságok közötti sima leképezéseknek egy nagyon természetes úton definiált ekvivalenciaosztályain egy természetes módon adódó csoportstruktúrát vizsgálnak. Eredményeket ebben a témában először Whitney, Pontrjagin, Thom érték el. Pontrjagin és Thom nyomán fejlődött ki egy módszer, a Pontrjagin-Thom konstrukció, ami algebrai topológiára redukálja a problémakört.

Fontos kérdés tetszőleges sima leképezések vizsgálata helyett a csak bizonyos rögzített típusú szingularitásokkal rendelkező sima leképezések vizsgálata, jelen dolgozat is ezzel foglalkozik. Szingularitásnak egy leképezés azon részét nevezzük, ahol nem elég szép, gyűrődései vannak. Különböző fajta szingularitásokhoz különböző fajta Pontrjagin-Thom konstrukciók fejlődtek ki Szücs András, valamint Rimányi Richárd kutatásainak eredményeként, de eddig még csak pozitív kodimenziós leképezésekre. Jelen dolgozat a hajtás típusú szingularitással rendelkező, -1 kodimenziós leképezésekre ad egy új Pontrjagin-Thom típusú konstrukciót.

Ezen új konstrukció mellett, annak egy alkalmazásaként jelen dolgozat kiszámolja a 3-dimenziós sokaságok síkba történő hajtás leképezéseinek kobordizmuscsoportját, majd az eredményt konkrét, egyszerűen kezelhető sokaságokkal és leképezésekkel, geometriai összefüggésekkel interpretálja. Emellett kiszámolja ezen leképezések bordizmuscsoportját is, ami egy kobordizmustól eltérő, geometriailag szintén jól interpretálható, és a leképezések osztályozásában fontos szerepet betöltő fogalom.

Konvex, kompakt halmazok közelítése ellipszisekkel

KELEMEN KÁROLY, matematikus szakos hallgató (2004 őszi)
Debreceni Egyetem, Debrecen

Témavezető: VINCZE CSABA, egyetemi adjunktus,
DE Matematikai Intézet, Geometria Tanszék

Legyen K az euklideszi sík egy nemüres, konvex, kompakt részhalmaza. Keressük azt az ellipszist, mely tartalmazza K -t és a nemüres konvex, kompakt halmazok családján értelmezett Blaschke távolságra nézve a K -hoz legközelebbi fedőellipszis. Azt az ellipszist, amely ezzel a tulajdonsággal rendelkezik, a továbbiakban K -hoz tartozó minimális fedőellipszisnek nevezzük. Az extrémum feladatok esetében a megoldás létezésének igazolása önmagában is fontos kezdeti lépés. Dolgozatunkban ezzel a kérdéssel foglalkozunk az [1] cikk alapján. A szerzők utaltak rá, hogy az egzisztencia kompaktsági érveléssel igazolható, azonban részletes kifejtésre a cikkben nem került sor. Dolgozatunk célja a részletek tisztázása: fedőellipszisek egyenletesen korlátos családjáról belátjuk, hogy kompakt halmazcsalád és a kívánt tulajdonságú fedőellipszis a folytonos távolságfüggvény minimumhelyeként adódik.

Hivatkozások:

- [1] Erdős P., Vincze I. és Makai E., On the best approximating ellipse containing a plane convex body, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 33 (1997), 111–116

Differenciálgeometriai vizsgálatok az érintőnyaláb-projekciómentén (tenzió, torzió, reguláris és metrikus deriváltak)

PÉK JOHANNA, matematika-ábrázoló geometria szakos hallgató (2005 tavasz)
Debreceni Egyetem, Debrecen

Témavezető: SZILASI JÓZSEF, egyetemi docens,
DE Geometria Tanszék

A dolgozat olyan kérdéseket tárgyal, amelyek az általánosított Finsler-metrikák tanulmányozása kapcsán vetődtek fel és fontosnak látszanak e metrikák további tanulmányozása szempontjából. Vizsgálataink számára alkalmas szintérnek az érintőnyaláb a természetes projekció általi pull-backje bizonyult.

Munkánkban megadjuk egy pszeudoriemann-vektornyaláb összes metrikus kovariáns deriválásainak leírását az Obata-operátor segítségével, amelynek egyben a geometriai jelentését is megvilágítjuk.

Levezetjük az általánosított Finsler-sokaságok struktúra-egyenleteit. Az eredmény újdonságát fokozza, hogy a struktúra-egyenletek korrekt fölírásával még a Finsler-esetben sem találkoztunk a pull-back keretek között.

Részletesen tárgyaljuk egy horizontális leképezés alapvető geometriai adatait (tenzió, torzió, erős torzió...), amelyeket az általa indukált Berwald-deriválás segítségével vezetünk be. Megvizsgáljuk, hogy egy horizontális leképezés és a hozzácsatolt másodrendű vektormező által indukált horizontális leképezés különbségtenzora, illetve egy horizontális leképezés és az általa indukált Berwald-deriválásból származó horizontális leképezés különbségtenzora hogyan jellemzi az erős torziót, illetve a tenziót. Meggondolásaink eredményeként több, klasszikusnak számító tételre is sikerült új, egyszerű bizonyítást találni.

Megmutatjuk, hogy a Riemann-geometriából jól ismert Ricci-lemma átvihető az általánosított Finsler-sokaságok keretei közé.

Ugyancsak vizsgáljuk a fent említett pull-back nyalábon adott kovariáns deriválások regularitási tulajdonságait. Különböző regularitási feltételeket fogalmazunk meg és jellemzünk a Finsler-konnexiók ún. h-vegyes torziója segítségével. A dolgozathoz az is kiderül, hogy a Finsler-konnexiók esetében használt öt torzió közül csupán kettő bír valódi torzió jelentéssel, a h-horizontális és a v-vertikális torzió.