Valószínűségszámítás, statisztika és pénzügyi matematika

Kedd 16:00 Marx-terem

1. **Baharev Ali (BME VMK)**
2. **Faluközy Tamás – Vágvölgyi Bálint – Vitéz Ildikó Ibolya (ELTE TTK)**
3. **Kevei Péter (SZTE TTK)**
4. **Lukity Anikó (UjE TTK)**
5. **Lukity Anikó (UjE TTK)**
6. **Sipos Ádám – Szabó Katalin (ELTE TTK)**
7. **Vető Bálint (BME TTK)**

Számítások nemcentrális *F*-eloszlással

BAHAREV ALI, vegyészmérnök hallgató (2004 ősz)
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest

Témavezető: KEMÉNY SÁNDOR, egyetemi tanár,
BME Vegyipari Műveletek Tanszék

A kutatás és fejlesztés egyik legmunkaigényesebb és legköltségesebb lépése a kísérletek elvégzése. Ezért nagy a jelentősége a kísérletek matematikai statisztika segítségével történő megtervezésének. A kísérlettervező kérdezheti azt, hogy mekkora mintát kell vennie a hatások egy adott nagyságú különbségének – valamilyen bizonyossággal történő – kimutatásához. Kíváncsi lehet arra is, hogy mekkora eltérés mutatható ki egy adott kísérleti tervvel. Az irodalomban táblázatokat találunk, amelyek segítségével ezek a kérdések megválaszolhatóak. Az egyik ilyen táblázat adatai ellentmondtak a közelítésekkel végzett számításoknak. A TDK feladatom célja ennek az ellentmondásnak a feloldása volt.

A táblázat elkészítése lényegében a nemcentrális *F*-eloszlást követő valószínűségi változó eloszlásfüggvényének számítását igényli. Ennek az eloszlásfüggvénynek a számítására több mint 20 algoritmus született. A gondos irodalmazás során azonban az is kiderült, hogy az algoritmusok többségének súlyos hibái vannak, valamint kevés táblázat található az irodalomban. Ezek a táblázatok nem szolgálják ki maradéktalanul a gyakorlat igényeit, számításuk menete vagy nem ismert vagy kifogásolható. Rendkívül fontos volt tehát kidolgozni egy algoritmust, és kijavítani a kísérlettervezéshez használt táblázatot, hiszen nincs könnyen hozzáférhető alternatívája az irodalomban.

A statisztikai hipotézisvizsgálat során gyakran használt χ^2-, *F*- és *t*-próbák ereje nemcentrális eloszlásokon keresztül számítható. Az általam kidolgozott algoritmus nem korlátozódik pusztán egy táblázat elkészítésére, hanem az előbbi próbák ereje közvetlenül számítható vele vagy a dolgozat alapján könnyen kidolgozható rá algoritmus. A nemcentrális *F*-eloszlás a kísérlettervezésen kívül a távközlésben és a radartechnikában is fontos szerepet játszik.

Munkám során tanulmányoztam a publikált algoritmusokat, szempontok szerint osztályozva őket. Ennek eredményeként sikerült feltárnom az algoritmusok alkalmazása során fellépő hibákat, és új algoritmust készítettem a táblázat számítására. Kijavítottam és bővítettem is a táblázatot. Több szoftver is képes a táblázat adatainak számítására, a szoftverek megbízhatóságának tanulmányozása is a célkitűzéseim közé sorolható. Az egyik ilyen szoftver a Statistica program, ennek a Power Analysis moduljában található algoritmusokat vizsgáltam, hibát nem találtam.

A gyakorlat szempontjait figyelembe véve összehasonlítottam az ismertebb közelítéseket is. Megállapítottam, hogy a közelítések a gyakorlat számára kielégítő eredményeket adnak, a táblázat akár közelítéssel is számítható.

Unit-linked életbiztosítások árazása kvantilis elvvel

FALUKÖZY TAMÁS, **VÁGVÖLGYI BÁLINT** és **VITÉZ ILDIKÓ**,
alkalmazott matematikus szakos hallgatók (2004 ősz)
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Témavezető: ARATÓ MIKLÓS, egyetemi docens,
ELTE Valószínűségelméleti és Statisztikai Tanszék

Az életbiztosítási piacon csak pár éve jelentek meg olyan termékek, melyeknél a kifizetések nemcsak a biztosítottak életbenlététől, hanem valamilyen részvenyárfolyamtól is függnek - ezek az ún. unit-linked életbiztosítások. A klasszikus, fix összegű termékekre széles körben használt várható érték elv gyengéje, hogy csak nagy, homogén veszélyközösség esetén alkalmazható hatékonyan. Ez a unit-linked biztosítások esetében általában nincs meg, ezért másféle díjkalkulációs elvekre van szükség.

Dolgozatunkban mi kvantilis elv alapján számolunk, melyre a nemzetközi szakirodalomban nem találtunk kidolgozott példákat. Az elv lényege, hogy olyan díjat szed a biztosító, amely alapján a biztosítás lejártakor szükséges összeg az esetek adott hányadában (például 99\%-os valószínűséggel) rendelkezésre áll. Az ilyen esetek kiválogatása önkényes, a lényeg, hogy összvalószínűségük elérje a kívánt szintet. Mivel a biztosítónak nyilvánvaló érdeke, hogy minél kevesebb pénzből finanszírozni tudja a kérdéses konstrukciót, így további célunk úgy kiválasztani a fedezendő eseteket, hogy a díj minimális legyen.

Jelen dolgozatunkban a biztosításmatematikai és pénzügyi bevezetés után egy konkrét példát mutatunk be, melyre felvázolunk néhány árazási módszert: a legegyszerűbbtől (amikor pénzügyi kockázatot nem vállalunk, csupán halálesetit) a bonyolult, opcióárazási technikákat felhasználókig. Ezután elméleti megoldást adunk a minimális díj meghatározására. Befejezésként általánosítjuk a példát és az addig ismertetett módszereket, majd újabb technikákat vázolunk fel az általános esetre.

Általánosított n-Pál paradoxon

KEVEI PÉTER, alkalmazott matematikus szak (2004 ősz)
Szegedi Tudományegyetem, Szeged

Témavezető: CSÖRGŐ SÁNDOR, tanszékvezető egyetemi tanár,
SZTE Sztochasztika Tanszék

Péter, a bankos, felajánlja, hogy $Pál_1$, $Pál_2$,..., $Pál_n$ játékosok mindegyikével egy-egy általánosított szentpétervári játékot játszik, amelyekben mindegyik Pál $q^{k-1}p$ valószínűséggel nyer r^k dukátot, $k = 1,2, \ldots$, ahol $0 < p < 1$, $q = 1-p$ és $r = 1/q$. $Pál_j$ nyereményét X_j-vel jelölve, a játékosok megegyeznek, hogy $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ össznyereményük önmaguk közötti szétosztására egy $\mathbf{p}_n = (p_{1,n},p_{2,n}, \ldots ,p_{n,n})$ valószínűségeloszlással meghatározott együttműködési stratégiát használnak, ahol tehát $p_{1,n},p_{2,n}, \ldots ,p_{n,n} \geq 0$, és $\sum_{j=1}^{n} p_{j,n} = 1$, úgy, hogy $Pál_1$ $p_{1,n} X_1 + p_{2,n} X2 + \ldots + p_{n,n} X_n$ dukátot, $Pál_2$ $p_{n,n} X_1 + p_{1,n} X_2 + \ldots + p_{n-1,n} X_n$ dukátot, ... , $Pál_n$ pedig $p_{2,n} X_1 + p_{3,n} X_2 + \ldots + p_{1,n} X_n$ dukátot kap. Végtelen várható értékek összehasonlításával meghatározzuk azokat a stratégiákat, amelyek minden Pál számára eredeti saját nyereményéhez képest extra hozamot eredményeznek annak ellenére, hogy Péter összesen ugyanazt az $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ dukátot fizeti ki. Ezek a megengedett stratégiák akkor és csak akkor léteznek, ha q egy speciális algebrai szám, és ekkor egy megengedett stratégia hozama a stratégia entrópiájának p/q-szorosa.

Megmutatjuk, hogy ez a hozam nemcsak improprius Riemann, hanem Lebesgue értelemben is mindig létezik annak ellenére, hogy a klasszikus $p = 1/2$ esettől eltérően az eredeti saját nyereményeket a megengedett stratégiákkal kapott összegek sztochasztikusan csak két játékos esetén dominálják mindig. Legalább három játékos esetén ugyanis megmutatjuk, hogy a sztochasztikus összehasonlítás általában nem lehetséges. Mint kiderül, ez meg annak ellenére van így, hogy sztochasztikusan domináns helyzetből egy természetes algoritmussal nyert megengedett stratégiák esetén a sztochasztikus dominancia öröklődik. Több esetben meghatározzuk az optimális megengedett stratégiát és ennek maximális hozamát, az általános helyzetben pedig feltárjuk a kapcsolatos számelméleti természetű nehézségeket.

A diszkontált jelenérték meghatározása elsőrendű differenciaegyenletek segítségével

LUKITY ANIKÓ, pénzügyi matematika szakos abszolvens hallgató (2003 ősz)
Újvidéki Egyetem, Újvidék

Témavezetők: TAKÁCSY ÁRPÁD, egyetemi tanár,
UjE Matematikai és Informatikai Intézet

E tudományos dolgozat arra keresi a választ, hogy milyen hatással van a kamatos kamat egy befektetéseket és kifizetéseket tartalmazó folyószámla egyenlegére.

Kezdetben a periódusonkénti kamatláb állandó. Ez esetben a konstans együtthatós elsőrendű differenciaegyenletek alkalmazása bizonyul a leghatékonyabbnak. Azonban, ha megengedett a kamatláb periódusonkénti váltakozása, a folyamat változó együtthatós lineáris elsőrendű differenciaegyenletek alkalmazását igényli. A harmadik részben tovább módosítsuk a feltételeket. Vesszük, hogy bármely két időpont közötti időtartam nullához közelít. Ekkor bebizonyosodik, hogy a folyama lineáris differenciálegyenlet segítségével jól modellezhető.

A fent említett egyenletek megoldásai elvezetnek a számunkra igen jól ismert diszkontált jelenérték képletéhez minden egyes esetnek megfelelően.

Opcióárazás

Lukity Anikó, pénzügyi matematika szakos apszolvens hallgató (2004 ősz)
Újvidéki Egyetem, Újvidék

Témavezetők: Takácsy Árpád, egyetemi tanár,
UjE Matematikai és Informatikai Intézet

A pénzügyi eszközök nagyon fontos csoportját alkotják a származtatott ügyletek, derivatívok. Ezek olyan ügyletek, amelyek értékét más értékpapírok árfolyama határozza meg.

Az egyik legfontosabb ilyen származtatott ügylet az opciók. A dolgozat tárgya az opcióárazás, azaz arra keresi a választ, hogy mennyit ér egy opció és melyek azok a tényezők amelyek a részvényopciók árára kihatással vannak.

Indulásképpen kivizsgálásra kerül az ún. egyperiódusos binomiális fa modellje, amely csak a legszükségesebbeket tartalmazza: egy részvényt és egy kincstárjegyet. Arbitrázsmentességen alapuló értékelés mellett meghatározásra kerül az opció ára. A munka második részében módosulnak a feltételek. A lejárati idő több azonos részre osztódik és minden időszak végén a részvény árfolyama kétféleképpen változhat. Ily módon jön létre a többperiódusos binomiális fa modellje. A fa szerkezete biztosítja azt, hogy bármely derivatív terméknek a fa minden egyes pontjában egyértelmű értéke legyen, hiszen bármely más érték arbitrázshelyzetet teremtene. A kifizetések a megfelelő visszaszámított értékeken keresztül a fa teljes kitöltésével elvezetnek a derivatív jelenbeli értékéhez.

Végül levezetésre kerül a nevezetes Black-Scholes opcióárazási formula.

Költségminimalizálás gyártási folyamatok statisztikai minőségszabályozása esetén

SIPOS ÁDÁM és **SZABÓ KATALIN**, alkalmazott matematikus szak (2004 ősz)
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Témavezető: ZEMPLÉNI ANDRÁS, egyetemi docens,
ELTE Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Napjainkban az életszínvonal emelkedésével párhuzamosan egyre növekszik a minőségbiztosítás jelentősége. Az előállított termékek megfelelőségét a gyártási folyamat során akkor garantálhatjuk, ha a folyamatot mindvégig statisztikai ellenőrzés alatt tartjuk. Az ipari gyakorlatban ennek eléréséhez használt eszközök közül az egyik leggyakoribbak a szabályozó kártyák. Használatukkor nagy szerepe van a kártyák paraméter-beállításainak, hiszen ezek nem csak a minőséget határozzák meg, hanem a költségtényezőket is befolyásolják. Az optimális beállítások megtalálásával jelentős költségmegtakarítás érhető el. Dolgozatunkban két ilyen szabályozó kártyával foglalkozunk: az X-kártyával és a Shiryayev-Roberts statisztikán alapuló kártyával. Célunk ezek paramétereinek meghatározása úgy, hogy közben az általunk használt költségfüggvényt minimalizáljuk.

A dolgozatban tehát arra a kérdésre keressük a választ, hogy milyen gyakran kell mintát venni, és hogyan kell megválasztani a riasztási küszöböt ahhoz, hogy a felmerülő költségek hosszútávon minimálisak legyenek. A költségfüggvényt úgy igyekszünk megválasztani, hogy tartalmazza a gyártás és ellenőrzés során felmerülő legfontosabb költségelemeket: a mintavétel, a hibásan előállított termékek, a téves riasztás költségét valamint a termeléskiesésből és a gyártósor javításából adódó költséget.

Miután megadjuk a minimális költségeket eredményező optimális paramétereket, összehasonlítjuk a két módszert, valamint azt is megvizsgáljuk, hogy az általunk bevezetett költségelemek mennyire érzékenyek a kártyák paramétereire.

Véletlen permutációk ciklusstruktúrája: egy keveredési modell

VETŐ BÁLINT, matematikus szak
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest

Témavezetők: TÓTH BÁLINT, tanszékvezető,
VALKÓ BENEDEK, tudományos munkatárs
BME Sztochasztika Tanszék

Legyen $V := \{1,\ldots,n\}$, melynek egyik elemét megjelöljük. Definiáljuk a V halmazon egymástól függetlenül a Ti i= 1,2,…véletlen transzpozíciókat. A $\pi(t) = T_t \circ T_{t-1} \circ \ldots \circ T_1$ véletlen permutáció ciklusfelbontásának (ciklushosszainak) időbeli változását vizsgáljuk. A modell egy összeolvadási-töredezési folyamatot (coagulation-fragmentation process) valósít meg, melynek határeloszlását ($n \to \infty$) szeretnénk megismerni.

Oded Schramm bizonyította, hogy ha a T_i transzpozíciókat az összes transzpozíció közül egyenletes eloszlással választjuk ki, és az időt n-szeresére gyorsítjuk, akkor az n-nel összemérhető nagyságú ún. óriásciklusok részarányának határeloszlása 1 paraméterű Poisson-Dirichlet eloszlás. A kérdéskört először témavezetőm, *Tóth Bálint* vetette föl a probléma kvantumfizikai alkalmazása miatt.

A T_i transzpozíciókat dolgozatomban az összes olyan transzpozíció közül választom egyenletes eloszlással, amelyek a megjelölt elemet is mozgatják. Ekkor az idő természetes skálázása a $\sqrt{n}$ - szeresre való felgyorsítás, ezért a ciklusok méretét $\sqrt{n}$ -hez viszonyítom. Az így kapott határfolyamatban a megjelölt elem ciklusának részaránya lineárisan növekszik, és a nemtriviális ciklusok összhosszával arányos sűrűségű inhomogén Poisson-folyamat által meghatározott időnként történik a következők valamelyike: a megjelölt elem ciklusa két részre szakad vagy egy másik ciklussal egyesül.

Az eloszlássorozat konvergenciáját a csatolás módszerével bizonyítom, vagyis közös valószínűségi mezőn konstruálom meg a határfolyamatot és a permutációkból kiszámítható részarányok változását, majd belátom, hogy azok 1-hez tartó valószínűséggel közel vannak egymáshoz.

A feladat általánosításával, a több megjelölt elem esetével is foglalkozom.